MATHS SUP
PTSI COLLES PROBABILITES (1)

$\boxed{\mathbf{1}}$ On considère un jeu de 32 cartes et on tire au hasard 5 cartes du jeu.

Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire trois fois de suite une boule avec remise.

Quelle est la probabilité d'obtenir trois numéros :

1. Dans un ordre strictement croissant ?

2. Dans un ordre croissant au sens large ?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres de sa bibliothèque. Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de « Guerre et Paix » de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ?

Probabilités conditionnelles

$\boxed{\mathbf{4}}$ Dans une usine on fabrique des composants éléctroniques sur trois machines. Les machines M_1, M_2, M_3 produisent produisent respectivement $50\%, 30\%$ et 20% des composants.

Le qualiticien de l'usine estime que :

- 2% des composants fabriqués par la machine 1 sont défectueux;
- 3% des composants fabriqués par la machine 2 sont défectueux;
- 5% des composants fabriqués par la machine 3 sont défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard soit défectueux ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce provenant de la machine M_1 et qui soit défectueuse ?

Les événéments "la pièce est défectueuse" et "la pièce provient de la machine 1" sont-ils indépendants ?

3. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de la machine 1 ?

$\boxed{\mathbf{5}}$ La proportion de pièces défectueuses dans un lot est $0,05$.

Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

- si la pièce est bonne elle est acceptée avec une probabilité de $0,96$;
- si la pièce est mauvaise elle est refusée avec une probabilité de $0,98$.

On choisit un pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité :

1. qu'il y-ait une erreur de contrôle ?

2. que la pièce soit mauvaise si elle est acceptée ?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Dans une population $1/4$ est vaccinée. Parmi les vaccinés, on compte $1/12$ de malades. Parmi les malades il y a 4 non vaccinés pour un vacciné.

Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition de 6 soit $\frac{1}{2}$. On prend un dé au hasard, on le jette, et on obtient 6.

Quelles est la probabilité que le dé soit pipé ?

$\boxed{8}$ On considère trois urnes

U_1 contient $\begin{cases} 2 \text{ boules noires} \\ 3 \text{ boules rouges} \end{cases}$, U_2 contient $\begin{cases} 1 \text{ boules noires} \\ 4 \text{ boules rouges} \end{cases}$, U_3 contient $\begin{cases} 3 \text{ boules noires} \\ 4 \text{ boules rouges} \end{cases}$.

On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2 et les met dans U_3. On tire une boule de U_3, elle est noire.

Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

$\boxed{9}$ Un sac contient 3 jetons. L'un de ces jetons a 2 faces noires, un autre 2 faces blanches et le troisième a une face noire et une face blanche.

On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table. La face visible est noire.

Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait 2 faces noires ?

Suites de probabilité

$\boxed{10}$ On considère n équipes de football de 1ère division et n équipes de 2ème division. On tire au sort n rencontres entre ces $2n$ équipes (chaque équipe joue un match et un seul).

1. Calculer la probabilité p_n pour que tous les matchs opposent une équipe de 1ère division à une équipe de 2ème division.

2. Calculer la probabilité q_n pour que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

3. Montrer que $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

$\boxed{11}$ – **Problème de météorologie**

Dans un certain pays, le temps est soit sec (S) soit humide (H). Son évolution obéit à la règle immuable suivante : si le temps est sec aujourd'hui, il sera sec demain avec la probabilité 4/5 (et donc humide avec la probabilité 1/5). Si le temps est humide aujourd'hui, il sera humide demain avec la probabilité 3/5.

Appelons S_n (resp. H_n) l'événement « le temps est sec (resp. humide) le n-ième jour ». On note s_n et h_n les probabilités de ces événements. On note également x_n le vecteur colonne : $x_n = \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la règle d'évolution, exprimer s_{n+1} et h_{n+1} en fonction de s_n et h_n .

2. En déduire que l'on a $x_{n+1} = Ax_n$, où A est une matrice à déterminer.

3. Nous sommes dimanche et il fait sec. Quelle est la probabilité que le temps soit sec mardi ? soit humide mercredi ?

$\boxed{12}$ Trois opérateurs téléphoniques A, B, C qui possèdent un tiers du marché décident de mettre sur le marché un nouveau type de forfait annuel. A la fin de l'année l'évolution des parts de marché se fait de la façon suivante :

- les clients de la compagnie A se répartissent indifféramment entre A, B, C l'année suivante;

- les clients de la compagnie B restent fidèles à leur compagnie;

- les clients de la compagnie C seront l'année suivante clients de A avec une probabilité de 1/12, de B avec une probabilité de 7/12 et de C avec une probabilité de 1/3.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n et c_n les probabilité pour qu'à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ année, un consommateur décide de s'abonner chez A, B ou C pour l'année suivante.

1. Déterminer une relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$.

2. En déduire l'expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n et déterminer la limite de ces suites.