$\boxed{1}$ Trouver trois complexes a, b et c tels que le polynôme $X^5 + aX^2 + b$ soit divisible par $X^3 + X^2 + cX + 1$.

$\boxed{2}$ Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes : **(i)** $P = X^4 + 1$; **(ii)** $Q = X^4 + X^2 + 1$; **(iii)** $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

$\boxed{3}$ Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$, sachant qu'il a une racine réelle.

$\boxed{4}$ Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes : **(i)** $P = X^n + X^{n-1} + ... + X + 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;
(ii) $P = X^{2n} - 2\cos a X^n + 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$\boxed{5}$ Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 - 3iX - 5(1 + i)$ (poser $X = x + iy$).

$\boxed{6}$ **1.** Trouver le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $(X - a)(X - b)$ $(a \neq b)$.
2. Trouver le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $B = (X - 1)^3$. Généraliser.

3. Même question avec $B = (X - 1)^2 (X - 2)$.

$\boxed{7}$ Déterminer a et b pour que le polynôme $A = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X - 1)^2$.

$\boxed{8}$ **1.** Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^{2n} + 1$.
2. Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1$.

$\boxed{9}$ Déterminer les complexes a, b et c pour que le polynôme $A = X^5 + aX^2 + b$ soit divisible par $X^3 + X^2 + cX + 1$.

$\boxed{10}$ Soient x_1, x_2 et x_3 les racines complexes du polynôme $X^3 - 3X - 4$.
Calculer les fonctions élémentaires σ_1, σ_2 et σ_3.
Trouver un polynôme de degré 3 ayant pour racines $x_1^2,\ x_2^2\ et\ x_3^2$.

$\boxed{11}$ Calculer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme :

$$nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n.$$

$\boxed{12}$ Déterminer les racines des deux polynômes $A = X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 4X + 3$ et $B = X^3 - 2X^2 - 2X - 3$ sachant qu'une est commune.

$\boxed{13}$ Trouver deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P^2 + Q^2 = (X^2 + 1)^2$.

$\boxed{14}$ Soit $n > 1$ et a et b deux réels distincts. On pose $E(a) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(a) = 0\}$, $E(b) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(b) = 0\}$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(a) = P(b) = 0\}$.
1. Montrer que $E(a)$, $E(b)$ et E sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe $P(a)X + P(b)$.
Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$.
Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = E(a) + E(b)$. Cette somme est-elle directe ?

$\boxed{\mathbf{15}}$ Pour λ réel donné soit u_λ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^3$définie par

$$u_\lambda(P) = (P(-2), P(2), P(\lambda)).$$

1. Trouver le noyau et le rang de u_λ.

2. Le triplet $(3, 2, 1)$ a-t-il un antécédant par u_λ ? Est-il unique ? Trouver tous ses antécédents par u_λ.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Soit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = XP" - P'$.

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Trouver son noyau; en donner une base; calculer sa dimension et en déduire le rang de φ.

2. Trouver l'image de φ; en donner une base; retrouver le rang de φ.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Soit n un entier naturel pair et l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\varphi(P) = \left(X^2 - 1\right)P' - nXP.$$

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Trouver son noyau; en donner une base; calculer sa dimension et en déduire le rang de φ. Trouver les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ **1.** Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer $\left(z + \frac{1}{z}\right) . \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$.
En déduire que pour tout entier naturel n il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = P_n\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1}. Préciser le degré de P_n.

2. Montrer que pour tout réel t et tout entier naturel n on a : $2\cos(nt) = P_n(2\cos t)$.
Quelles sont les racines de P_n ? En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

$\boxed{\mathbf{19}}$ Soit la fonction f définie $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = e^{-x^2} P_n(x).$$

Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.

2. Pour tout entier $n \geq 1$,trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1} (utiliser la relation $f' + 2xf = 0$).

3. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $P_n^{'} = -2nP_{n-1}$ et que P_n est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n-1} = 1$.
En déduire la factorisation du polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} X^{2k}$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.