

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 + 2x} \geq 1 - x$.

2 Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{6k}\right) \right| < 1$.

3 Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ (a et b réels) telles que, pour tout x de $[a, b]$ on ait : $0 < f(x) < g(x)$.

Etudier la suite (x_n) définie pour tout n par $x_n = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^n$ (avec $x \in [a, b]$ donné).

4 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période $T > 0$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

5 Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Etudier si f est prolongeable par continuité en 0. Si oui ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

2. Développement limité de f en $x_0 = 1$ à l'ordre 2.

6 Soit $J(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos \theta \cos x}$.

1. Montrer que J est définie ssi x n'est pas un multiple de π .

2. Calculer $J(x)$.

7 Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{\pi}{4}$.

8 Etude aux bornes de son ensemble de définition de $f(x) = (x-1)^2 \frac{e^{1/x}}{x}$.

9 Calculer les limites : **a.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + ax^2 + x + 1} - mx\sqrt{x+2})$; **b.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1-\cos x) \sin x - x^3(1+x^2)^{1/4}}{\sin^5 x - x^5}$.

10 Etudier la parité de l'application $x \mapsto \int_x^{3x} e^{t^2} dt$.

11 Soit la fonction $F : x \mapsto \int_x^{x^2+1} \frac{dt}{t \ln t}$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $]1, \infty[$ et calculer F' .

2. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

12 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$ pour tout $(\alpha, \beta) \in [a, b]$. Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

13 Etudier et tracer le graphique de la fonction f définie par $f(x) = e^{-1/x} \frac{(x-1)^2}{x}$.

14 1. Donner le développement limité de $\arcsin x$ à l'ordre 5 en 0.

2. Donner le développement limité de $f(x) = \frac{\arctan x}{\arcsin x}$ à l'ordre 4 en 0.

15 Soit f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même qui à P associe $f(P) = P(1-X)$.

Montrer que f est une symétrie et en préciser ses éléments caractéristiques.

16 Calculer $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$.

17 1. Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ continue telle que pour tout x dans $[a, b]$, $f(x) = f(a + b - x)$. Montrer que $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$.

2. Calculer $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$.

18 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2} . En déduire I_2 .

19 Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

1. Etudier la convergence de (u_n) .

2. Calculer $\int_0^1 (n+1)t^n dt$.

3. Déterminer la limite de $((n+1)u_n)$ et trouver un équivalent de (u_n) .

20 Etudier la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^2}$. Donner un développement limité en $1/n$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ (on pourra utiliser des intégrations par parties).

21 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = n(\sqrt[n]{3} - 1)$. Donner la limite l de (u_n) et trouver un équivalent de $(u_n - l)$.

22 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ montrer que $(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}$. Quelle est sa parité ?

2. On pose $u_n = \sin\left(\pi\left((1 + \sqrt{2})^n\right)\right)$. Trouver la limite de (u_n) et en trouver un équivalent.

23 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

24 Trouver la limite des suites (u_n) et (v_n) définies par

1. $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$; 2. $\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k \sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

25 Pour n entier naturel ≥ 3 et x réel positif on pose $g_n(x) = x^n + nx - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $g_n(u_n) = 0$.

2. Etudier la convergence de la suite (u_n) .

26 Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$.

27 On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt$.

1. Etudier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer la limite de la suite (I_n) .

28 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

29 Etudier la suite complexe (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \frac{z_n^2}{1+|z_n|^2}$.

30 Résoudre les équations différentielles : 1. $xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 2. $(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$; 3. $x^2y' + (2x-1)y = 0$; y-a-t-il des solutions dans $\mathbb{R}$?; 4. $y'' - 3y = \sin x$; 5. $y'' + 6y' + 9y = e^{3x} + 2e^{-2x}$; 6. $y'' + y = e^{-|x|}$; 7. $y'' + y = \cos^3 x$; 8. $(1-x^2y') + xy = 1$.

31 En utilisant la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a :

$$0 \leq \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \leq \frac{x^3}{16}.$$

32 Montrer que pour tout x de $]0, 1[$ on a $\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

33 Soit $P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Combien le polynôme P_n a-t-il de racines dans $]0, 1[$?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit c_n une racine de P_n dans $]0, 1[$. La suite (c_n) a-t-elle une limite quand n tend vers l'infini ? Si oui la calculer.

34 Soit le polynôme $P = X^3 + 2X - \pi$ et a, b et c ses trois racines complexes (distinctes ou non). Calculer : **1.** $S_1 = a + b + c$; **2.** $S_2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; **3.** $S_3 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

35 **1.** Montrer que $P(X) = \frac{X^{2n}-1}{X^2-1}$ est un polynôme. Trouver ses racines. Le développer et le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)$.

36 Soient les polynômes $P = X^2 - 4X + 5$ et $Q = X^3 - (1+i)X^2 - 3X + 3-i$. Déterminer les racines communes de P et Q .

37 Trouver les entiers naturels n tels que $X^2 + X + 1$ divise $(X^n + 1)^n - X^n$.

38 Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que $A^2 = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(A + I_2)^n = I_2 + nA$. Calculer B^n avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

39 Soit A une matrice carrée d'ordre n de coefficients $a_{i,j} = \frac{i}{j}$. Ecrire A . Déterminer A^2 , le rang et le noyau de A .

40 Soit $A \in M(p, q)$ (ensemble des matrices à p lignes et q colonnes). Montrer que :

$$rg(A) \leq 1 \iff \exists (U, V) \in M_{p,1} \times M_{q,1} / A = U^t V.$$

41 Soit A et B deux matrices de type (n, n) telles que $AB = 0$. Montrer que $rgA + rgB \leq n$.

42 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

Généraliser avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \diagup & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (n lignes et n colonnes).

43 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

44 Soit $A(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{R}$).

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver $c \in \mathbb{R}$ tel que $M(a) \cdot M(b) = M(c)$.
2. Donner une CNS pour que $M(a)$ soit inversible. Calculer alors son inverse.
3. Déterminer $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$. Nature de l'endomorphisme canoniquement associé à $M(a_0)$.

45 Soit Φ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même qui à P associe $\Phi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.
Montrer que Φ est linéaire. Ecrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer son noyau et son image.

- 46** Dans $\mathbb{R}^2$ on considère $D = Vect((1, 3))$ et $D' = Vect((-2, 4))$.
1. Montrer que $\mathbb{R}^2 = D \oplus D'$.
 2. Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ la matrice de la projection sur D parallèlement à D' .

47 Dans $\mathbb{R}^4$ soit $u = (-1, 1, -1, 1)$ et $v = (1, -3, -1, 3)$. Trouver un système d'équations cartésiennes de $Vect(u, v)$ et trouver un supplémentaire de $Vect(u, v)$ dans $\mathbb{R}^4$.

48 Soit E un K -espace vectoriel et $f \in L(E)$. Montrer que :

$$\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \iff E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f).$$

49 Soit E un K -espace vectoriel et $f \in L(E)$ telle que $f^2 = -f$.

1. Montrer que $\ker(f + Id) = \text{Im } f$.
2. On suppose E de dimension finie. Montrer que $E = \text{Im } f \oplus \text{Im}(f + Id)$.

50 Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n tel que $f^3 = Id$.

1. Montrer que $\text{Im}(f - Id) \subset \ker(f^2 + f + Id)$.
2. Montrer que $E = \text{Im}(f - Id) \oplus \ker(f - Id)$.

51 Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$.

1. Soient les polynômes $P_k = (X - 1)^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Montrer que $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de E . Trouver la matrice de passage de la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ à la base $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$.

2. Soient les polynômes $P_k = \prod_{i=0, i \neq k}^4 (X - i)$. Montrer que $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de E .

3. Soit $F = \{P \in E / P(1) = P'(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

4. Trouver une base de F .
5. Trouver une base d'un supplémentaire de F dans E .

52 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ on pose $T(f) = g$, l'application g étant définie, pour tout réel x , par : $g(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\ker T$ et $\text{Im } T$.

53 Soit $a = 4\sqrt{2}(-1 + i)$. Ecrire a sous forme trigonométrique et résoudre l'équation $z^3 = a$ (donner les solutions sous forme trigonométrique). Calculer $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

54 Soit f définie dans $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = z - \frac{1}{z}$.

1. Montrer que f est surjective mais non injective.
2. Déterminer l'image par f de U , ensemble des nombres complexes de module 1.
3. Déterminer l'image réciproque par f de l'ensemble des imaginaires purs.

55 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}$. Calculer le produit de toutes les solutions non nulles de cette équation.

56 Soit u un complexe de module 1. On pose $A(u) = (1+u)^n + (1+\bar{u})$ et $B(u) = (1+u)^n - (1+\bar{u})$.

1. Exprimer $A(u)$ et $B(u)$ sous forme d'une somme.
2. Calculer directement $A(u)$ et $B(u)$.
3. Soit n un entier naturel divisible par 4. Calculer :

$$\sum_{p=0}^{n/2} (-1)^p \binom{n}{2p}.$$

57 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$.

58 Dans un repère orthonormé direct du plan trouver une équation cartésienne et polaire de la conique de foyer $F(2, 1)$, de directrice $D : x = 5$ et d'excentricité $e = 2/3$.

59 Identifier la conique d'équation $x^2 + xy + y^2 = 1$ (dans un repère orthonormé direct du plan).

60 Tracer la courbe d'équation polaire $r = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$.

61 Etudier la courbe d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t^2 + \frac{2}{t} \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases}$.