

1 Un endomorphisme f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 . Que peut-on en déduire sur la nature de f ? Trouver une base dans laquelle la matrice de f soit "simple".

2 Un endomorphisme f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 . Que peut-on en déduire sur la nature de f ? Trouver une base dans laquelle la matrice de f soit "simple".

3 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à M .

Montrer que $f_1(2, 3, 1)$, $f_2(3, 4, 1)$, $f_3(1, 2, 2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) . En déduire le calcul de M^n .

4 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à

M . Montrer que $f_1(1, 1, -1)$, $f_2(-2, 0, 1)$, $f_3(1, -1, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) . En déduire le calcul de M^n .

5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le rang de A .

2. Montrer que $A^2 = A$. Que peut-on en déduire pour f , endomorphisme canoniquement associé à A ?

3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est "simple".

6 Soit φ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P' + XP'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Trouver la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Trouver le rang, le noyau et l'image de φ .

7 Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Trouver la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Trouver le rang de φ .

8 Dans l'espace muni E d'une base orthonormée direct $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit le vecteur $\vec{a}$ de coordonnées $(1 - 1, 2)$.

Montrer que l'application f définie par $f(\vec{x}) = a \wedge \vec{x}$ est un endomorphisme de E et trouver sa matrice dans la base B .

9 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On considère dans E les fonctions $g_1 : x \mapsto e^{2x}$, $g_2 : x \mapsto e^x \cos x$, et $g_3 : x \mapsto e^x \sin x$.

Soit F est le sous-espace vectoriel engendré par g_1, g_2 et g_3 et Φ l'application de E dans E qui à $f \in E$ associe $f'' - 2f'$.

1. Montrer que le système (g_1, g_2, g_3) est libre.

2. Exprimer $\Phi(g_1), \Phi(g_2), \Phi(g_3)$ en fonction de g_1, g_2, g_3 .

Si F est le sous-espace vectoriel engendré par g_1, g_2 et g_3 on considère dans la question suivante Φ comme une application de F dans F .

3. Trouver la matrice de Φ dans la base (g_1, g_2, g_3) . Trouver le noyau de Δ . Δ est-il un automorphisme de F ?

10 Soit E l'espace vectoriel des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les éléments de E définis par : $x_1(t) = \cos(t)\text{ch}(t)$, $x_2(t) = \sin(t)\text{ch}(t)$, $x_3(t) = \cos(t)\text{sh}(t)$, $x_4(t) = \sin(t)\text{sh}(t)$.

1. Montrer que la famille (x_1, x_2, x_3, x_4) est libre dans E .

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Soit u l'application de F dans E qui à f associe f' .

Montrer que u définit un endomorphisme de F . Trouver la matrice M dans la base B .

3. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

11 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par ses formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = x/2 - y/2 + z/2 \\ y' = -x + z \\ z' = x/2 + y/2 + z/2 \end{cases}.$$

1. Calculer le rang de f .

2. Montrer que $f^2 = Id$. Que peut-on en déduire pour f ?

3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est "simple".

12 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par ses formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = x + 4y + 5z \\ y' = 2x - y - 8z \\ z' = -x + 2y + 7z \\ t' = 3x + y - 7z \end{cases}.$$

1. Trouver la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

2. Calculer le rang de f . Trouver une base de $\text{Im } f$.

3. Trouver $\ker f$ et une base de $\ker f$.

13 Dans l'ensemble des vecteurs de l'espace muni d'une base orthonormée directe B soit s la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = y = z$ de direction le plan d'équation $x + z = 0$.

Trouver la matrice de s dans la base B .

14 Dans l'ensemble des vecteurs de l'espace muni d'une base orthonormée directe B soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y + z = 0$.

Trouver la matrice de s dans la base B .