$\boxed{\textbf{1}}$ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 = A$.

$\boxed{\textbf{2}}$ Calculer A^n pour les matrices suivantes :

a/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; **b/** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$; **c/** $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;

$\boxed{\textbf{3}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 - (a+d)\,A + (ad-bc)\,I = 0$.

A quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.

$\boxed{\textbf{4}}$ Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ deux deux manières différentes.

$\boxed{\textbf{5}}$ **1.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $(A + I_3)^3 = 0$. En déduire A^n $(n \in \mathbb{N})$. A est-elle inversible ? Si oui donner A^{-1}.

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer M^n en fonction de M (on calculera $M^2 + 2M - 3I_3$ et le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 2X - 3$).

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que pour tout entier $n \geq 1$: $A^n = a_n A^2 + b_n A$.

$\boxed{\textbf{6}}$ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer trois réels a, b et c tels que $A^3 = aA^2 + bA + cI_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

$\boxed{\textbf{7}}$ Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{8}}$ Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer P^{-1}, puis $P^{-1}MP$. En déduire le calcul de M^n.

$\boxed{\textbf{9}}$ **1.** Soit N une matrice telle que : $\exists p \in \mathbb{N} / N^p = 0$.

Montrer que la matrice $I - N$ est inversible d'inverse $I + N + ... + N^{p-1}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En utilisant 1/ calculer A^{-1}.

3. Montrer que $A^2 - 4A + 4I_3 = 0$. Retrouver A^{-1}.

$\boxed{\textbf{10}}$ Montrer que toute matrice carrée de est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.