$\boxed{1}$ Calculer les limites des fonctions données au point a; donner si possible un équivalent en a :

a. $(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$, $a=0$; **b.** $(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$, $a=0$; **c.** $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, $a=0$;
d. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$, $a=0$; **e.** x^x, $a=0$; **f.** $\dfrac{b^x-1}{\ln(1+x)}$, $a=0$;
g. $\dfrac{\ln(1\ +\ \sin x)}{\tan 2x}$, $a=0$; **h.** $\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$, $a=1$; **i.** $\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\pi/4}$, $a=\frac{\pi}{4}$;
j. $\dfrac{e^{\frac{\ln^2 x+1}{\ln x}+1}}{x^2}$, $a=+\infty$; **k.** $\dfrac{x^x-1}{\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)}$, $a=1^+$; **l.** $\dfrac{(\sin x)^x-1}{x^x-1}$, $a=0^+$;
m. $(2-x)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$, $a=1$; **n.** $(1+\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$, $a=1$; **o.** $(\cos x)^{\ln x}$, $a=0^+$;
p. $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{2}}$, $a=+\infty$; **q.** $\dfrac{2\tan x-\sin 2x}{\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2+3x^2}}$, $a=0$; **r.** $x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}$, $a=\frac{\pi}{2}$;
s. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x^2}}{\cos x-\cos 2x}$, $a=0$; **t.** $\tan x\tan 2x$, $a=\frac{\pi}{2}$; **u.** $(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$, $a=\frac{1}{2}$;
v. $x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$, $a=+\infty$.

$\boxed{2}$ Déterminer suivant les valeurs du réel a la limite de

$$\sqrt{x^2+x+1}-ax$$

en $+\infty$.

$\boxed{3}$ Etudier la continuité des applications f définies par :
a. $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$;
b. $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$;
c. $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$;
d. $f(x)=e^{\frac{\ln x}{\ln x-1}}$.

$\boxed{4}$ L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ est -elle bijective ?
Si oui calculer sa bijection réciproque. Quelles sont ses propriétés ?

$\boxed{5}$ L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ est -elle bijective ?
Si oui calculer sa bijection réciproque. Quelles sont ses propriétés ?

$\boxed{7}$ **1.** Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I=[a,b]$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs (i.e l'ensemble $f(I)$ est fini).

Montrer que f est constante sur I.

2. Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $I=[a,b]$ telles que $|f|=|g|$ (i.e pour tout x de I on a : $|f(x)|=|g(x)|$) et pour tout x de I : $f(x)\neq 0$.

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

$\boxed{8}$ **1.** Soit a un réel donné strictement positif. Montrer que l'équation $x^n = a(1-x)$ a une unique solution α_n appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

2. Soit φ_n l'application définie par $\varphi_n(x) = x^n - a(1-x)$. Comparer $\varphi_{n+1}(x)$ et $\varphi_n(x)$.

En déduire que la suite (α_n) est croissante. Que peut-on en conclure pour cette suite ?

3. Trouver la limite de la suite (α_n).

$\boxed{9}$ Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que : $\forall x > 0, f(x) < x$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.

2. Montrer que pour tout intervalle $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ il existe $M \in [0,1[$ tel que pour tout x de $[a,b]$ on a : $f(x) \leq Mx$ (*indication* : considérer l'application $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ sur $[a,b]$ et appliquer les théorèmes généraux sur les fonctions continues sur un intervalle).

$\boxed{10}$ Montrer que pour tout entier naturel n l'équation $x \tan x = 1$ a une unique solution (x_n) dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right[$. Donner un équivalent de la suite (x_n).

$\boxed{11}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$.

$\boxed{12}$ Pour tout entier naturel n on considère l'application f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n + x - 1.$$

1. Montrer que pour tout n l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

2. Pour $x \in]0,1[$ montrer que $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

En déduire que la suite (x_n) est monotone et qu'elle est convergente. Quelle est sa limite ?

$\boxed{13}$ Montrer que pour tout entier naturel n l'équation $x \sin x = 1$ a une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]2n\pi;\ 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Donner un équivalent de la suite (x_n).

$\boxed{14}$ Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans $[0,1]$.

On suppose de plus que $f \circ f = f$.

Montrer que si l'équation $f(x) = x$ a une unique solution alors f est constante.