$\boxed{1}$ Nature le éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ Nature et éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ Nature et éléments caractéristiques de l'endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice dans une base orthonormée directe est :$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

$\boxed{4}$ Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ pour que l'endomorphisme associé soit une isométrie positive. Déterminer la nature de cet endomorphisme.

$\boxed{5}$ Dans un espace euclidien déterminer la matrice M de la réflexion s de plan P d'équation $x+y-z=0$. Que peut-on dire de cette matrice ? Trouver une base orthonormée directe dans laquelle la matrice D de s est "simple". Trouver une relation entre M et D.

$\boxed{6}$ Dans un espace euclidien déterminer la matrice de la rotation r d'angle $\pi/4$, d'axe la droite engendrée par le vecteur de coordonnée $(1,1,1)$. Que peut-on dire de cette matrice ? Trouver une base orthonormée directe dans laquelle la matrice D de r est "simple". Trouver une relation entre M et D.

$\boxed{7}$ Condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ soit orthogonale. Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f associé à A dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{8}$ Dans un espace vectoriel euclidien E soit u un vecteur unitaire. Soit p la projection orthogonale sur la droite Δ engendrée par u.

1. Montrer que pour tout x de E on a :

$$p(x) = (x.u)\,u.$$

2. E est muni d'une base orthonormée (i,j,k). Déterminer matrice M de la projection p sur la droite Δ intersection des plans d'équations $x-y+z=0$ et $x+2z=0$. Que peut-on dire de cette matrice ? Trouver une base orthonormée directe dans laquelle la matrice D de p est "simple". Trouver une relation entre M et D.

$\boxed{9}$ Dans un espace vectoriel euclidien E soient u et v deux vecteurs unitaires orthogonaux. Soit p la réflexion orthogonale par rapport au plan P engendré par u et v.

1. Montrer que pour tout x de E on a :

$$p(x) = (x.u)\,u + (x.v)\,v.$$

2. E est muni d'une base orthonormée (i, j, k). Déterminer la matrice M de la projection orthogonale p sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$. Que peut-on dire de cette matrice ? Trouver une base orthonormée directe dans laquelle la matrice D de p est "simple". Trouver une relation entre M et D.

$\boxed{10}$ Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égal à 2.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire de E.

2. Trouver une base orthogonale (e_0, e_1, e_3) telle que e_i soit un polynôme unitaire de degré i $(0 \leq i \leq 2)$.

3. En déduire une base orthonormée de E.

$\boxed{11}$ Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2x+y-z = 0$ (dans une base orthonormée).