$\boxed{1}$ Etudier la limite des suite (I_n) et (J_n) définies par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$ et $J_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n} dx$.

$\boxed{2}$ Soit la suite (W_n) définie par $W_n = \int_0^1 \sin^n x dx$.
Montrer que (W_n) est convergente et trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.

$\boxed{3}$ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\exists k > 0 / \forall x \geq 0, f(x) \leq k \int_0^x f(t)\, dt.$$

Montrer que f est égale à la fonction nulle (*indication* : considérer la fonction φ définie par $\varphi(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t)\, dt$).

$\boxed{4}$ Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_a^b f(t)\, dt = M(b-a)$ où $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$. Montrer que f est constante sur $[a, b]$ (*indication* : considérer la fonction φ définie par $\varphi(x) = M - f(x)$ sur $[a, b]$).

$\boxed{5}$ Soit f une fonction continue de $[0, a]$ (a réel > 0 donné) dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^a f(t)\, dt = \frac{a^2}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, a]$ tel que $f(x_0) = x_0$ (*indication* : considérer la fonction $\varphi(x) = f(x) - x$).

$\boxed{6}$ Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue, différente de l'application nulle, telle que $\int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 (f(t))^2\, dt$. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1$.

$\boxed{7}$ Soit (I_n) la suite réelle définie par pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?

3. Montrer que pour tout réel t de $[0,1]$ on a :

$$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t).$$

En déduire la limite de la suite (I_n) et celle de (nI_n).

$\boxed{8}$ On pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. En déduire le calcul de I_n.

$\boxed{9}$ Soit (I_n) la suite réelle définie par pour tout entier naturel n non nul par $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\, dt$.

1. Calculer I_n sous forme d'un "sigma".

2. Trouver une formule de récurrence entre I_n et I_{n+1}. En déduire, à l'aide du 1/, une formule sommatoire.

$\boxed{10}$ **1.** Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ calculer $I_{n,p} = \int_0^1 t^n (\ln t)^p\, dt$.

2. Calculer $\int_0^1 t^p (1-t)^q\, dt$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

$\boxed{11}$ **1.** Montrer que pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $0 \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi} x$.

En déduire que suite réelle (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$ converge vers 0.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

En déduire un équivalent de (I_n) et la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Soit (I_n) la suite réelle définie par pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^{\pi/2} t^n \cos(2t) \; dt$.

Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour $n \geq 2$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Soit (I_n) la suite réelle définie par pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^{2n+1} t}$.
Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour $n \geq 2$. Calculer I_0 et I_1.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Soit la suite (I_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

1. Calculer I_1.

2. Etudier le sens de variation de (I_n) et sa convergence.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_{n+1} en fonction de I_n. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

4. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$.

1. Montrer que f est paire.

2. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$ on a $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$. En déduire la limite en 0 de f.

3. Etudier les variations de f.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Etudier l'ensemble de définition de f et son signe.

2. Etudier l'ensemble de continuité et de dérivabilité de f, calculer $f'(x)$ et trouver le sens de variation de f.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que $ln3 - f(x) = \int_x^{3x} \frac{1-e^{-t}}{t} dt$. Montrer que la fonction $t \longmapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$est bornée pour $t > 0$ et en déduire la limite en 0_+ de f.

$\boxed{\mathbf{17}}$ **1.** Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue telle que pour tout x dans $[a, b]$, $f(x) = f(a + b - x)$. Montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

2. Calculer $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

1. Etudier la convergence de la suite (u_n).

2. Calculer $\int_0^1 (n+1) t^n dt$.

3. Déterminer la limite de la suite $((n+1) u_n)$ et trouver un équivalent de (u_n).

$\boxed{\mathbf{19}}$ Pour tout entier naturel p on considère l'intégrale $I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p et en déduire I_2 et I_3.

3. Calculer la limite de la suite (I_p).

4. Au moyen d'une intégration par parties, déterminer la limite de la suite (pI_p) et en déduire un équivalent de (I_p).

20 Pour tout entier naturel non nul n on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1. Démontrer que la suite (I_n) est convergente (on ne demande pas ici de trouver sa limite).

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^n, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Conclusion pour (I_n) ?

3. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

4. Déterminer les réels a et b tels que

$$I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

21 On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt$.

1. Etudier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer la limite de la suite (I_n).

22 **1.** Montrer que $A = \int_0^1 \ln(1+t^2)dt = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

2. Pour tout entier naturel non nul n on considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 (1+t^2)^{1/n} dt$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 \leq u_n \leq 2^{1/n}$. En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

3. Montrer que pour tout réel $u \geq 0$ on a : $|e^u - 1 - u| \leq \frac{1}{2}u^2 e^u$.

4. Soit t un réel de l'intervalle $[0,1]$. Montrer que :

$$\left| \left(1+t^2\right)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \ln\left(1+t^2\right) \right| \leq \frac{1}{2n^2} (\ln 2)^2 . 2^{1/n}$$

En déduire que la suite $u_n - 1$ est équivalente à $\frac{A}{n}$.

23 Trouver la limite des suites suivantes : **1.** $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$; **2.** $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$;

3. $\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \ ... \ + \sqrt[n]{2^n}\right)$; **4.** $\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)...2n}$.

24 **1.** Montrer que pour tous entiers naturels n non nul et k tel que $0 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin nx| \, dx = \frac{2}{n}.$$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\frac{2\pi^2 k^2}{n^3} \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} x^2 |\sin nx| \, dx \leq \frac{\pi^2 (k+1)^2}{n^3}.$$

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\pi^2(n-1)(2n-1)}{3n^2} \leq \int_0^\pi x^2 |\sin nx| \, dx \leq \frac{\pi^2(n+1)(2n+1)}{3n^2}$.

4. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^\pi x^2 |\sin nx| \, dx$.