$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de l'espace E.

a. Montrer que : $\forall \vec{x} \in E$, $x = \left(\vec{x}.\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{x}.\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{x}.\vec{k}\right)\vec{k}$.

b. Montrer que $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $\|\vec{x}\wedge\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 . \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}.\vec{y})^2$.

c. Montrer que pour tout vecteur $\vec{x}$ de norme 1 on a :

$$\left\|\vec{x}\wedge\vec{i}\right\|^2 + \left\|\vec{x}\wedge\vec{j}\right\|^2 + \left\|\vec{x}\wedge\vec{k}\right\|^2 = 2.$$

En déduire que l'un au moins des trois réels

$$\left\|\vec{x}\wedge\vec{i}\right\|,\ \left\|\vec{x}\wedge\vec{j}\right\|,\ \left\|\vec{x}\wedge\vec{k}\right\|$$

est $\geq \sqrt{2/3}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soient les points $A(-1,1,3)$, $B(2,1,0)$ et $C(4,-1,5)$.

1. Existe un unique plan passant par ces trois points ? Si oui en donner une équation cartésienne.

2. Calculer l'aire du triangle ABC.

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que : **a.** $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$; **b.** $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Dans le plan soit D_m la droite passant par $A(-1,0)$ de coefficient directeur m et C la courbe d'équation : $x^2+y^2-4x-2y+4=0$.

a. Quelle est la nature de l'ensemble C ? Donner ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersections de D_m et de C.

c. En déduire l'équation des tangentes à C issues de A.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Soient P le plan passant par le point $A(1,-1,0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(2,1,-1)$ et $\vec{v}(1,4,1)$, et P' le plan passant par $B(1,2,1)$, $C(1,4,0)$ et $E(1,-1,3)$.

a. Déterminer une équation cartésienne de P et P'.

b. Trouver $P\cap P'$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Soit l'ensemble E des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$.

a. Quelle est la nature de l'ensemble E ? Trouver une équation paramétrique de E.

b. Trouver une équation cartésienne du plan P contenant E et passant par le point $A(1,-2,3)$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Trouver le projeté orthogonal du point $A(1,-1,2)$ sur le plan d'équation $x+y-z=0$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Soient D la droite passant par $A(3,0,1)$ et dirigée par vecteurs $\vec{u}(2,1,1)$ et D' la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} x=z+2 \\ y=3z-3 \end{cases}$.

a. Montrer que les droites D et D' sont coplanaires et déterminer une équation cartésienne du plan contenant D et D'.

b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que les droites D $\left\{\begin{array}{l} x = az - 1 \\ y = 2z + 3 \end{array}\right.$ et $D' \left\{\begin{array}{l} x = z - 2 \\ y = 3z - 1 \end{array}\right.$ soient coplanaires.

$\boxed{8}$ **a.** Soit la droite D d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l} x = y + 1 \\ z = y \end{array}\right.$

Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à D et passant par $A\,(1, 1, 1)$.

b. Soit le plan P d'équation $x + y + z + 1 = 0$ et le plan P' d'équation $x + 2z = 1$.

Déterminer une équation cartésienne du plan P" perpendiculaire à P et P' et passant par le point $B\,(1, 0, 0)$.

c. Soient les droites D $\left\{\begin{array}{l} x = 3z + 1 \\ y = 2z - 1 \end{array}\right.$ et $D' \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = 1 \end{array}\right.$.

Déterminer des équations cartésienne de la droite D" coupant orthogonalement les droites D et D' (on dit que D" est la perpendiculaire commune à D et D').

$\boxed{9}$ Déterminer l'ensemble des points équidistants des deux plans d'équations respectives

$$P : 3x - 4y + 1 = 0;\ Q : 6x - 2y - 3z + 2 = 0.$$

Remarque ?