E est un espace vectoriel euclidien. On note $\langle x, y\rangle$ ou $x.y$ son produit scalaire.

1 Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de E.

a. Montrer que : $\forall x \in E$, $x = (x.i)\, i + (x.j)\, j + (x.k)\, k$.

b. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x.y)^2$.

c. Montrer que pour tout vecteur normé x de E on a :

$$\|x \wedge i\|^2 + \|x \wedge j\|^2 + \|x \wedge k\|^2 = 2.$$

En déduire que l'un au moins des trois réels $\|x \wedge i\|$, $\|x \wedge j\|$, $\|x \wedge k\|$ est $\geq \sqrt{2/3}$.

2 On suppose $\dim E = 3$. Montrer qu'il n'existe pas trois vecteurs de E formant entre eux un angle de mesure $> \frac{2\pi}{3}$ (*indication* : raisonner par l'absurde en considérant trois vecteurs unitaires x, y et z formant entre eux un angle de mesure $> \frac{2\pi}{3}$; que peut-on dire que $x.y$, $y.z$ et $x.z$? En déduire une contradiction en considérant $\|x + y + z\|^2$).

3 On considère les quatre applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \sin x, f_3(x) = \cos 2x, f_4(x) = \sin 2x.$$

Soit E l'espace vectoriel engendré par $(f_i)_{1 \leq i \leq 4}$.

On considère l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(f, g) \longmapsto \langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt.$$

1. Montrer que cette application est un produit scalaire de E.

2. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est un base orthonormée de E.

4 Dans E soit v un vecteur non nul et λ un réel non nul. Soit f l'application définie par : $f(x) = x + \lambda \langle x, v\rangle v$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que f soit une isométrie vectorielle. Préciser alors la nature de f.

5 Dans E orienté de dimension 3 soit w un vecteur normé. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ pour que l'application f de E dans E définie par :

$$f(x) = \alpha x + \beta \langle x, w\rangle w + \gamma (w \wedge x).$$

soit une rotation vectorielle. Préciser alors ses éléments caractéristiques (on pourra trouver la matrice de f dans une base orthonormée directe (u, v, w)).

6 **1.** Dans E soit f une application de E dans E telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle.$$

Montrer que f est linéaire (pour $z \in E$ développer $\langle f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y), z\rangle$.

2. Montrer qu'une projection orthogonale vérifie la condition précédente.

$\boxed{\textbf{7}}$ Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique déterminer la matrice dans la base canonique du quart de tour autour du vecteur $(1,1,1)$.

$\boxed{\textbf{8}}$ Soient $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille de $n+1$réels distincts deux à deux. Pour P et Q appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ on pose $\langle P,Q\rangle = \sum\limits_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On pose $L_k = \prod\limits_{i\neq k} \frac{X-a_i}{a_k-a_i}$ pour $0 \leq k \leq n$. Montrer que la famille (L_k) est une base orthonormée de $(\mathbb{R}_n[X], \langle ; \rangle)$.