

[1] Montrer que les application f suivantes sont linéaires. Trouver leur noyau, image et préciser une base de chacun. Conclusion pour f ?

- a. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y \\ z' = x + 2z \end{cases}$;
- b. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x - y + z \end{cases}$;
- c. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \\ z' = x + 2z \end{cases}$;
- d. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \end{cases}$.

[2] Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ y' = \frac{3x}{2} - \frac{y}{2} \end{cases}$. Calculer $f \circ f$. Conclusion pour f ? Trouver les éléments caractéristiques de f .

[3] Soient f et g les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x + y)$ et $g(x, y) = (x - y, x - y)$. Montrer que $g \circ f = 0$ et calculer $f \circ g$.

[4] Montrer qu'il existe une application linéaire unique u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $u((1, 0)) = (-1, 1, 0)$ et $u((0, 1)) = (1, 2, -1)$.

Trouver le noyau et l'image de u .

[5] Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $u = (1, 1, 0, -1)$, $v = (1, 0, 0, -1)$, $w = (1, 0, -1, 0)$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par u , v et w et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z + 2t = 0\}$.

a. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Donner sa dimension.

b. Préciser une base de F , G , $F + G$ et $F \cap G$.

[6] Etudier suivant la valeur du paramètre réel m la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u = (m, 1, 1)$, $v = (-1, -m, -1)$, $w = (-1, -1, m)$.

[7] Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) et (f_1, f_2, f_3) les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Soit l'application f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(e_1) = f_1 + 2f_2 - f_3$, $f(e_2) = 2f_1 + 3f_3$, $f(e_3) = 4f_1 + 4f_2 + f_3$, $f(e_4) = 2f_1 + 3f_3$.

a. Justifier l'existence de f . Trouver $\ker f$ et en donner une base.

b. Calculer le rang de f .

[8] Soit g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par les formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = x + 4y + 5z \\ y' = 2x - y - 8z \\ z' = -x + 2y + 7z \\ t' = 3x + y - 7z \end{cases} .$$

a. Calculer le rang de g . Donner une base de $\text{Im } g$.

b. Trouver $\ker g$ et en donner une base.

9 Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = z + a\bar{z}$ (où a est un complexe donné).

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ (considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

Déterminer son noyau et son image.

10 Montrer que les éléments de $\mathbb{R}^4$: $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1, 1)$, $w = (1, -1, 1, -1)$ et $x = (1, -1, -1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $(1, 2, 1, 1)$ dans cette base ?

11 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $u = (1, 4, -1, 0)$, $v = (6, 10, 1, 0)$, $w = (2, 2, 1, 1)$. Est-il possible de les compléter en une base de $\mathbb{R}^4$? Si oui le faire.

12 Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E .

a. Montrer que $u^2 = 0 \iff \text{Im } u \subset \ker u$.

b. Montrer que si $\text{Im } u = \ker u$ alors la dimension de E est paire. Quelle est alors le rang de u ?

13 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 de base (e_1, e_2, e_3) . Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, $u(e_3) = 0$.

a. Justifier l'existence de u . Montrer que $u \neq 0$, $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

b. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit x un élément de E tel que $f^2(x) \neq 0$. Montrer que le système $(x, f(x), f^2(x))$ est libre dans E .

c. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme de E tel que $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$.

14 Soit E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Donner une condition nécessaire et suffisante sur les dimensions de F et G pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\ker u = F$ et $\text{Im } u = G$.

15 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 0)$ et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 1, 1)$. Calculer $F \cap G$ et $F + G$.

16 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Montrer que $\ker f = \text{Im } f$ ssi $f^2 = 0$ et $n = 2\text{rg } f$.

17 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $F = \{x \mapsto a \cos(x - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . Calculer sa dimension.

2. Montrer que l'application φ de E dans E qui à f associe $f'' + f$ est un endomorphisme de E . Quel est son noyau ?