MATHS SUP Lycée Laetitia-Bonaparte Ajaccio

PTSI Colles ESPACES VECTORIELS (1)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Trouver une base de F.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \alpha + 2\beta, y = \alpha - \beta, z = \beta\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner une base.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $F = \{f \in E / af'' + bf' + cf = 0\}$ (où a, b et c sont trois constantes données) est un sous-espace vectoriel de E.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Pour quelles valeurs du réel a l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = a\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner alors une base.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les ensembles $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y = y + 3z + 2t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + z = y + t\}$.

Montrer que V et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Préciser $V \cap F$ et donner une base de V de F et de $V \cap F$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les éléments $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$, $w = (2, 1, 0)$. La famille (u, v, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$? Trouver une équation du sous-espace vectoriel engendré par u, v et w.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y$
Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Soit P l'espace vectoriel des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère dans P les ensembles $F = \{f \in P / f(1) = f'(1) = 0\}$ et $G = \{f \in P / \forall x \in, f(x) = ax + b\}$.

Montrer que $P = F \oplus G$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Soit u une application linéaire de E dans F. Montrer que le noyau de u est un sous-espace vectoriel de E et que l'image de u est un sous-espace vectoriel de F.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Soit u une application linéaire de E dans F. Montrer que u est injective ssi le noyau de u est égal à $\{0\}$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ **a.** Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $2x - y$. Montrer que f est linéaire. Calculer $\ker f$. Que peut-on en déduire pour f ?

b. Même question avec l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g((x, y)) = (x - 2y, x + 3y)$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x - y + z, 2x + y - 2z)$. Montrer que f est linéaire. Est-elle injective ? surjective ? Trouver le noyau et en donner une base.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit φ l'application de E dans E définie par $\varphi(f) = f - f'$. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Déterminer le noyau de φ. Conclusion pour φ ?

$\boxed{\mathbf{14}}$ Dans l'ensemble V des vecteurs du plan on considère l'application p de V dans V définie par $p(\vec{x}) = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} . \overrightarrow{a})\, \overrightarrow{a}$, où $\overrightarrow{a}$ est un vecteur donné de V.

Montrer que p est un endomorphisme de V. Déterminez son noyau et son image. Montrer que si $\overrightarrow{a}$ est de norme 1 alors p est un projecteur.