$\boxed{1}$ Calculer les déterminants :

a. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$; **b.** $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ c & b & bc \end{vmatrix}$; **c.** $\begin{vmatrix} xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{vmatrix}$;

d. $\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & a^3+c^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$; **e.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$; **f.** $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$;

g. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$; **h.** $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ac \\ 1 & b & c & bd \\ 1 & c & d & ac \\ 1 & d & a & bd \end{vmatrix}$; **i.** $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$;

j. $\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ (\alpha+1)^2 & (\beta+1)^2 & (\gamma+1)^2 \\ (\alpha+2)^2 & (\beta+2)^2 & (\gamma+2)^2 \end{vmatrix}$; **k.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; **l.** $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 & 4\alpha^3 \\ 4\alpha^3 & 3\alpha^2 & 2\alpha & 1 \end{vmatrix}$;

m. $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 & 4\alpha^4 \\ 4\alpha^3 & 3\alpha^2 & 2\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

$\boxed{2}$ Calculer le déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

$\boxed{3}$ Soit le déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

1. Trouver une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 2$.

2. En considérant $\Delta_n = D_n - D_{n-1}$ calculer D_n.

$\boxed{4}$ Calculer le déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$.

$\boxed{5}$ Calculer le déterminant de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = XP'(X+2) + P(1)\left(X^3 - 1\right).$$