$\boxed{1}$ Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a.
a. Montrer que $f+g$ dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
b. Montrer que $f \times g$ dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$.
c. Montrer que si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$est dérivable en a et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$.

$\boxed{2}$ Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f' :
a. $f(x) = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$; **b.** $f(x) = (3+2x^2)^3$; **c.** $f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$; **d.** $f(x) = \ln|x^2+3x-4|$; **e.** $f(x) = \sin^3(x^3)$; **f.** $f(x) = \ln^3(2x-1)$;

$\boxed{3}$ Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :
a. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$;
b. $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
c. $f(x) = x\ln x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
d. $f(x) = \begin{cases} 1-x \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

$\boxed{4}$ **a.** Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire.
b. Démontrer que la dérivée d'une fonction périodique est périodique.

$\boxed{5}$ Montrer que pour tout réel $x > 0$: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ et que : $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

$\boxed{6}$ Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0,1[$ on a :

$$\frac{x\ln x}{x^2-1} \leq \frac{1}{2}.$$

$\boxed{7}$ Etudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ (préciser notamment l'ensemble de continuité, de dérivabilité et les prolongement par continuité possible).

$\boxed{8}$ Etudier la fonction f définie par $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (préciser notamment l'ensemble de continuité, de dérivabilité et les prolongement par continuité possible).

$\boxed{9}$ Trouver une relation simple entre les fonctions $\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$et $\arccos(1-x)$.

$\boxed{10}$ Etudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin x + \arcsin\frac{x}{2}$.
Résoudre l'équation $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

$\boxed{11}$ Soit f la restriction de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que f admet une application réciproque f^{-1}. Donner des propriétés de f. Etudier la dérivabilité de f. Calculer la dérivée de f^{-1}.
$\boxed{12}$ Montrer que l'équation $-\ln x + \frac{1}{x} = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

$\boxed{\textbf{13}}$ Soit f une fonction dérivable en a.
Montrer que la fonction φ définie par : $\varphi(x) = \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ a une limite finie au point a.

$\boxed{\textbf{14}}$ Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ telle que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = M$$

où M est la borne supérieure de f' sur $[a, b]$.

Montrer que f est une fonction affine

(*indication* : considérer la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x) - (Mx + b)$ avec un réel b convenable).

$\boxed{\textbf{15}}$ **a.** Montrer que pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel n on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.
En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}.$$

b. Montrer que pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel n on a :

$$0 \leq e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \frac{x^2}{2n}.$$

$\boxed{\textbf{16}}$ Calculer la dérivée n-ième des fonctions :
a. $x^{n-1} \ln x$; **b.** $\frac{1-x}{1+x}$; **c.** $\sin^2 x. \cos^3 x$; **d.** $x^2 (1 + x)^n$.