

1 Résoudre dans \mathbb{Z} les équations :

a. $x - 1 \mid x + 3$; **b.** $x + 2 \mid x^2 + 2$.

(<http://mp.cpgedupuydelome.fr/mesexos.php?idSect=158>)

2 Résoudre dans \mathbb{Z}^2 les équations :

a. $xy = 3x + 2y$; **b.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$; **c.** $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$.

3 Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient dans la division euclidienne de $a - 1$ par b .

(*Idem*)

4 Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

(*Idem*)

5 Calculer le pgcd de 1764 et 3465.

(Réponse : 63).

6 Montrer que si a et b sont des entiers naturels non nuls, alors ils ont même pgcd que les entiers $A = 4a + 3b$ et $B = 5a + 4b$.

7 Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls (a, b) tels que $a + b = 360$ et $a \wedge b = 18$.

8 Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=1}^n k.k! = (n+1)! - 1.$$

9 Quel est le nombre de diagonales d'un polygone de n côtés ?

10 Dans le plan on considère six points dont trois quelconques ne sont pas alignés.

a. Combien ces points déterminent-ils de droites ?

b. Quel est le nombre des nouveaux points obtenus par intersection de deux quelconques de ces droites ?

(*Condamine de Vissio p.169*).

11 Soit un jeu de dominos (chaque domino contient 2 chiffres entre 0 et 6, éventuellement identiques).

a. Combien y a-t'il de dominos distincts ?

b. De combien de façons peut-on tirer deux dominos compatibles (i.e. qui aient un chiffre en commun) ?

c. De combien de façons peut-on tirer 5 dominos dont au moins un double ?

(*HEC p. 18, n°104*)

12 On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

a. On suppose que les 10 billes soient de couleur différente.

De combien de façon peut-on les ranger ?

b. On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes et que l'on ne peut discerner les billes de même couleur.

(i) De combien de façon peut-on les ranger ?

(ii) De combien de façon peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleur ?

(iii) Même question mais seules les rouges doivent être groupées.

(HEC p. 18, n°106)

13 On appelle *main* tout ensemble de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.

a. Combien y a-t-il de mains différentes ?

b. Combien y a-t-il de mains différentes contenant :

(i) au moins 1 pique ?

(ii) au plus un pique ?

(iii) exactement un as et contenant au plus 2 piques ?

(HEC p. 19, n°202)

14 *Constitution d'un jury*

On désire former un jury composé de 2 scientifiques et 3 littéraires. On peut choisir les membres du jury parmi 5 scientifiques et 7 littéraires. De combien de façons peut-on former un jury dans les cas suivants :

1. N'importe quel scientifique et n'importe quel littéraire peuvent être choisis.

2. Un scientifique donné doit obligatoirement faire partie du jury.

3. Deux littéraires donnés ne peuvent pas faire partie du même jury.

(*Mathématique, exercices incontournables, Dunod, p. 64*)

15 Combien y a-t-il d'applications surjectives de $[[1, 5]]$ dans $[[1, 4]]$?

(HEC p. 19, n°201)