

1 Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que : $\arg(z + a) \equiv \arg(z) + \arg(a) \pmod{\pi}$.

2 Montrer que pour tous nombres complexes z et z' on a :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Quand y-a t'il égalité ?

3 Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z - 1)(z - 2i)$ soit réel.

4 Calculer les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ sous forme algébrique.

En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

5 Montrer que pour tout entier naturel n on a : $(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

6 Dans un repère orthonormé direct on considère trois points A , B et C d'un cercle de centre O . Soient a , b et c les affixes de ces points.

Montrer que le point H d'affixe $a + b + c$ est l'orthocentre du triangle ABC .

7 Soient A et B les points d'affixe $4 + 2i$ et $-2 - i$. A tout point m d'affixe z , $z \neq -2 - i$, on associe le point M d'affixe $Z = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$.

a. Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$.

b. Préciser et construire l'ensemble des points m tels que $|Z| = 1$; Z réel; Z imaginaire pur.

8 A tout point m d'affixe z , $z \neq 2$, on associe le point M d'affixe $Z = \frac{2z-1}{2-z}$.

Déterminer l'ensemble (E) des points m d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

Déterminer l'ensemble (F) des points m d'affixe z tels que $\arg Z = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Tracer ces ensembles.

9 Tracer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$.

10 Soient trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c .

1. Montrer que A, B, C sont alignés ssi $(a - b) \cdot \overline{(a - c)} \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ssi $(a - b) \cdot \overline{(a - c)} \in i\mathbb{R}$.

11 Soient quatre points A, B, C et D d'affixes a, b, c et d situés sur le cercle de centre O .

Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux ssi $ab + cd = 0$.

12 On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et on rappelle que $1 + j + j^2 = 0$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Soient A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c . Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct (i.e. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est direct) ssi

$$a + jb + j^2c = 0.$$

2. On suppose que le triangle ABC est équilatéral direct. Soient trois triangles équilatéraux directs OAA' ; OBB' et OCC' .

Montrer que les milieux I, J, K de $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$ forment un triangle équilatéral direct.

13 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct soient A et B les points d'affixe 1 et -1 . Si M est le point d'affixe z soit M' le point d'affixe $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

Montrer que : **a.** $|z'| = 1$; **b.** $\frac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$; **c.** $\frac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

En déduire une construction du point M' connaissant le point M .

14 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct soient A et B les points d'affixe 2 et -2 . Si M est le point d'affixe $z \neq 2$ soit M' le point d'affixe $z' = \frac{\bar{z}(z-2)}{\bar{z}-2}$.

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels $M = M'$.

Montrer que si z n'est pas réel : **a.** $\frac{z-2}{z'-z}$ est imaginaire pur; **b.** $\frac{z'+2}{z-2} \in \mathbb{R}$.

En déduire une construction du point M' connaissant le point M .

15 a. Exprimer $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$. En déduire le module et l'argument de $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+iz)^3(1-i \tan \alpha) = (1-iz)^3(1+i \tan \alpha)$.

16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct soient A et B les points d'affixe 1 et -1 . Si $M \neq O$ est le point d'affixe z soit M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{z}$.

a. Montrer que la droite (AB) est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et que $OM \cdot OM' = 1$.

b. Montrer que $\left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$.

Soit I le milieu du segment $[MM']$. Montrer que la droite (MM') est bissectrice de $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ et que $IA \cdot IB = IM^2$.

17 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a. $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$; **b.** $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3-i}}$.

18 Calculer : **a.** $(1 + \cos a + i \sin a)^n$ ($n \in \mathbb{N}$); **b.** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$.

19 a et b étant des complexes distincts de module 1 calculer $\frac{a+b}{a-b}$ et $\frac{a+b}{1-ab}$ ($ab \neq 1$).

20 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

a. $(2+i)z^2 - 5iz + 2 - 2i = 0$; **b.** $z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$; **c.** $z^2 - \frac{4}{\sin \theta}z + \frac{13}{\sin^2 \theta} - 9 = 0$

;

d. $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i \sin \theta e^{i\theta} = 0$ (écrire les racines sous forme exponentielle);

e. $z^3 - (5-3i)z^2 + (6-11i)z + 2+16i = 0$ (chercher une racine imaginaire pure);

f. $(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$; **g.** $z^3 - z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0$ (il y-a une racine réelle);

i. $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$ (poser $Z = z + \frac{1}{z}$ et se ramener à $Z^2 - 5Z + 4 = 0$).

21 Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$.

Montrer que $\sin^2 \alpha - 2(1 + \cos \alpha) = -4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2 \sin \alpha z + 2(1 + \cos \alpha) = 0$.

Calculer le module et un argument des solutions.

22 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - (1 - 2 \sin \alpha)z^2 + (1 - 2 \sin \alpha)z - 1 = 0$.

On note z_1, z_2 et z_3 les solutions (avec $|z_1| = 1$). Pour quelles valeurs de α les réels $|z_2 + 1|, |z_1|$ et $|z_3 + 1|$ forment-ils une progression géométrique ?

23 Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^6$ soit réel.

24 Pour z complexe non nul on pose $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

a. Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe z' . f est-elle injective ? surjective ?

b. Montrer que $\left(\frac{z'-1}{z'+1}\right) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$.

Trouver l'image réciproque de l'axe des réels par f .

25 Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

a. Pour z de module 1 et distinct de 1 donner la forme exponentielle de $f(z)$.

b. Trouver les antécédents de 1 et -1 par f . f est-elle injective ? surjective ?

c. Préciser $f^{-1}(\mathbb{R})$.

26 Calculer **a.** $C_1 = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_1 = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$;

b. $C_2 = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(kx)}{\cos^k x}$; **c.** $C_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$.

27 Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $Z = \frac{z+i}{iz+1}$.

Montrer que $\frac{Z-1}{Z+1} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{z-1}{z+1}$. Quel est l'image par f de l'axe des imaginaires purs ?

Quel est l'image réciproque par f du cercle de diamètre $[AB]$, A et B étant les points d'affixe 1 et -1 ?

28 On pose $z_0 = e^{2i\pi/5}$, $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

a. Montrer que α et β sont solution de l'équation du second degré : $X^2 + X - 1 = 0$.

b. Déterminer α en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et β en fonction de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

c. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

29 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

a. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

b. Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer $\left(z + \frac{1}{z}\right) \cdot \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$. En déduire que pour tout entier naturel n il existe un polynôme P_n tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z^n) = P_n(f(z))$.

Quelles sont les racines de P_n ?